素数ものさしの考察

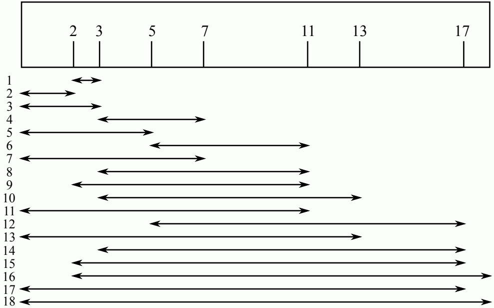
屯遁

(神戸大学 情報基盤センター 田村直之)

2015 年 7 月 12 日
近畿和算ゼミナール
(2016.3.22 修正)

はじめに

長さ 18cm の素数モノサシ



- 長さ 18cm で，18 未満の素数 cm の位置に目盛りがある．
- 1cm から 18cm まで 1cm 単位ですべての長さを測れる．
  - このようなモノサシを完備な素数モノサシと呼ぶ．

- 京都大学の学生生協で売られている．

疑問 1

他に完備素数モノサシは存在するか?

疑問 1

他に完備素数モノサシは存在するか?
Yes

- **長さ** 20 **の素数モノサシは完備.**
  - **目盛り位置**: (0),2,3,5,7,11,13,17,19,(20)
  - (5 **と** 13 **の目盛りを除いても完備.**)
- **長さ** 42 **の素数モノサシは完備でない.**
  - **目盛り位置**: (0),2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,(42)
  - 33 **を測れないので完備でない.**
    - **奇素数の差では** 33 **は測れない.**
    - **したがって, 両端か** 2 **との差で測る必要がある.**
    - **しかし** $33,\ 42-33=9,\ 2+33=35$ **のいずれも素数でない.**

疑問 2

完備素数モノサシは無限個存在するか?

疑問 2

完備素数モノサシは無限個存在するか?

No

完備素数モノサシの長さ L の一覧

$$L = 1, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 32, 38, 44, 62$$

- **他の長さの完備素数モノサシは存在しない．**
- **以下で，それを証明する．**
  - **すなわち，十分に長い素数モノサシには，測れない長さ ℓ が必ず存在する．**
  - (33 **か** 119 **を測れない．以下でそれを示す．**)

定義

- i 番目の素数を p_i で表す．
  - $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots$
  - $i \geq 3$ の時の p_i は $6m \pm 1$ $(m \geq 1)$ で表せる．
- 長さが L で $p_1, p_2, \ldots, p_n$ を内部目盛りとするモノサシを長さ L の**素数モノサシ**と呼ぶ．
  - ただし p_n は L 未満で最大の素数とする．
- 長さ L のモノサシが，1 以上 L 以下のすべての整数長 ℓ を測れる時，**完備**であるという．

- 簡単のため L 未満のすべての素数を目盛りに含むとする．
- いくつかの素数が間引かれている場合でも，以下の議論は適用できる．

考察 1

素数モノサシの長さ L に関する考察

長さ $L \geq 6$ の素数モノサシを考える．

- $\ell = L - 1$ を測るためには，$L - 1$ の位置に目盛りが必要．すなわち $L = p_n + 1$ である．
- $p_n \geq 5$ なので $p_n = 6m \pm 1$ $(m \geq 1)$ と表せる．
- L は偶数で $6m$ または $6m + 2$ である．

- 京都大学の素数モノサシが 18cm で，素数長でないことを批判する意見を見たことがあるが，的外れといえる．
- 素数長の完備素数モノサシは 3cm 以外に存在しない．さすがに 3cm のモノサシは面白くなかろう．

考察 2

測りたい長さ ℓ に関する考察

- 偶数 ℓ について ℓ が測れないことを示すのは難しい．
  - ℓ が素数の差で表せないことを示す必要がある．
  - ゴールドバッハの予想より難しそうだ．
    - 双子素数，いとこ素数，セクシー素数，Polignac の予想
- そこで奇数 ℓ について測れない場合を探すことにする．ℓ を測る方法は以下の 3 通りに限られる．

$$\begin{array}{lll} (1) & \ell = p_i & (0 \text{ から測る場合}) \\ (2) & \ell = p_i - 2 & (2 \text{ から測る場合}) \\ (3) & \ell = L - p_i & (L \text{ から測る場合}) \end{array}$$

- $L = 6m$ の場合と $L = 6m + 2$ の場合に分けて，測れない長さを探してみよう．

考察3

$L = 6m$ の場合

$$\begin{array}{lll} (1) & \ell = p_i & (0\text{ から測る場合}) \\ (2) & \ell = p_i - 2 & (2\text{ から測る場合}) \\ (3) & \ell = L - p_i & (L\text{ から測る場合}) \end{array}$$

- ℓ が非素数, $\ell + 2$ が非素数，$6m - \ell$ が非素数となる奇数 ℓ が存在すれば，それは測れない．
- $6m - \ell$ が非素数の条件は，$\ell \equiv 0 \pmod 3$ とすれば良い．
  - ただし $6m - \ell > 3$ (2016.3.22 追記)

考察 3

$L = 6m$ の場合

$$\begin{array}{lll} (1) & \ell = p_i & (0\text{ から測る場合}) \\ (2) & \ell = p_i - 2 & (2\text{ から測る場合}) \\ (3) & \ell = L - p_i & (L\text{ から測る場合}) \end{array}$$

- ℓ が非素数, $\ell + 2$ が非素数，$6m - \ell$ が非素数となる奇数 ℓ が存在すれば，それは測れない．
- $6m - \ell$ が非素数の条件は，$\ell \equiv 0 \pmod 3$ とすれば良い．
  - ただし $6m - \ell > 3$ (2016.3.22 追記)
- 探してみると $\ell = 33$ が見つかる．
  - $33 = 3 \cdot 11$, $35 = 5 \cdot 7$, $33 \equiv 0 \pmod 3$
- したがって $L = 6m \geq 42$ の素数モノサシは完備でない (2016.3.22 修正)．

考察 4

$L = 6m + 2$ の場合

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \ell = p_i & (0 \text{ から測る場合}) \\
(2) & \ell = p_i - 2 & (2 \text{ から測る場合}) \\
(3) & \ell = L - p_i & (L \text{ から測る場合})
\end{array}
$$

- ℓ が非素数, $\ell + 2$ が非素数，$6m + 2 - \ell$ が非素数となる奇数 ℓ が存在すれば，それは測れない．
- $6m + 2 - \ell$ が非素数の条件は $\ell \equiv 2 \pmod 3$ とすれば良い．
  - ただし $6m + 2 - \ell > 3$ (2016.3.22 追記)

考察4

$L = 6m + 2$ の場合

$$\begin{array}{llr} (1) & \ell = p_i & (0 \text{ から測る場合}) \\ (2) & \ell = p_i - 2 & (2 \text{ から測る場合}) \\ (3) & \ell = L - p_i & (L \text{ から測る場合}) \end{array}$$

- ℓ が非素数, $\ell + 2$ が非素数，$6m + 2 - \ell$ が非素数となる奇数 ℓ が存在すれば，それは測れない．
- $6m + 2 - \ell$ が非素数の条件は $\ell \equiv 2 \pmod 3$ とすれば良い．
  - ただし $6m + 2 - \ell > 3$ (2016.3.22 追記)
- 頑張って探してみると $\ell = 119$ が見つかる．
  - $119 = 7 \cdot 17$, $121 = 11^2$, $117 \equiv 0 \pmod 3$
- したがって $L = 6m + 2 \geq 128$ の素数モノサシは完備でない (2016.3.22 修正)．

結論

- **以上から，長さが** 128 **以上の完備素数モノサシは存在しないことがわかった** (2016.3.22 **修正**)**.**
- **実際には，**128 **未満でも以下の長さについてしか完備素数モノサシは存在しない** (2016.3.22 **修正**)**.**

p_n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61
L	3	4	6	8	12	14	18	20	24	30	32	38	42	44	48	54	60	62
完備	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	×	○

- **列** 3,4,6,. . . ,44,62 **は** On-Line Encyclopedia of Integer Sequences **に数列** A227956 **として登録されている.**

発展 1

- $M \subset \mathbb{N}$ を可能な目盛りの集合とする．
- 以下を満たす列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ を M-**モノサシ**と呼び，$a_{n+1} = L$ をその**長さ**と呼ぶ．
  - $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = L$
  - $a_1, \cdots, a_n \in M$
- M-モノサシが以下を満たす時，**完備** (complete) という．
  - $\#\{a_j - a_i \mid 0 \leq i < j \leq n+1\} = L + 1$
- 完備な M-モノサシのどの目盛り a_i $(1 \leq i \leq n)$ を除いても完備でなくなる時，**極小** (minimal) という．

- 完備 $\mathbb{N}$-モノサシは sparse ruler と呼ばれ，極小なものが調べられている (藤村，田村『パズル数学入門』, Wikipedia など)．
- $\#\{a_j - a_i \mid 0 \leq i < j \leq n+1\} = (n+1)(n+2)/2$ を満たす $\mathbb{N}$-モノサシは，ゴロム定規 (Golomb ruler) と呼ばれる．

発展 2

- **素数の集合を P とすると，素数モノサシは P-モノサシと定義できる．**
  - **完備 P-モノサシの最大長は** 62 **である** [**屯遁** 2013]
- $\mathsf{P}' = \mathsf{P} \cup \{10p \mid p \in \mathsf{P}\}$ **とする．つまり素数の** cm **目盛りと** mm **目盛りを持つ．**
  - **完備 P′-モノサシの最大長は** 182 **である** [**屯遁** 2015]

- **京都大学の素数モノサシは** 1mm **単位の素数目盛りも刻まれている．** 18cm **でなく** 182mm **なら完備かつ最長だった**. . .

発展 2

- 素数の集合を $\mathbf{P}$ とすると，素数モノサシは $\mathbf{P}$-モノサシと定義できる．
  - 完備 $\mathbf{P}$-モノサシの最大長は 62 である [屯遁 2013]
- $\mathbf{P}' = \mathbf{P} \cup \{10p \mid p \in \mathbf{P}\}$ とする．つまり素数の cm 目盛りと mm 目盛りを持つ．
  - 完備 $\mathbf{P}'$-モノサシの最大長は 182 である [屯遁 2015]

- 京都大学の素数モノサシは 1mm 単位の素数目盛りも刻まれている．18cm でなく 182mm なら完備かつ最長だった...

1. $M = \mathbf{P} \cup \{ap \mid p \in \mathbf{P}\}$　($a = 3$ の時 212 が最長?)
2. $M = \mathbf{P} \cup \{p^2 \mid p \in \mathbf{P}\}$　(152 が最長?)
3. $M = \{p^i \mid p \in \mathbf{P},\ i = 1, 2, 3\}$　(242 が最長?)
4. $M = \{p^i \mid p \in \mathbf{P},\ i \geq 1\}$　(~~972~~ 1194 が最長?)
   - 511, 901, 1111, 1133, 1141, 1333 などが測れないようだ．
5. $M =$ フィボナッチ数など

P′-モノサシについて (1)

P′-モノサシの定義

長さ L **で** $10p_1, \ldots, 10p_m$ **および** $p_1, \ldots, p_n$ **に内部目盛りがあるモノサシを P′-モノサシと呼ぶ．**

- **ただし** p_m **は** $10p_m < L$ **を満たす最大の素数，** p_n **は** $p_n < L$ **を満たす最大の素数とする．**

P′-モノサシについて (1)

P′-モノサシの定義

長さ L で $10p_1, \ldots, 10p_m$ および $p_1, \ldots, p_n$ に内部目盛りがあるモノサシを P′-モノサシと呼ぶ．

- ただし p_m は $10p_m < L$ を満たす最大の素数，p_n は $p_n < L$ を満たす最大の素数とする．

定理

$L > 182$ の完備 P′-モノサシは存在しない．

- 以下では，天下り的であるが $L \geq 215$ の時に $L-1, 215, 75$ のどれかが測れないことを示す (つまり，測れると仮定した時，矛盾することを示す)．
- また $L < 215$ の範囲を計算機プログラムで調べた所 $L = 182$ が最長だった．

P′-モノサシについて (2)

長さ ℓ の測り方の分類

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \ell = 10p_i \\
(2) & \ell = p_j \\
(3) & \ell = L \\
(4) & \ell = 10p_i - 10p_{i'} \\
(5) & \ell = p_j - p_{j'} \\
(6) & \ell = |10p_i - p_j| \\
(7) & \ell = L - 10p_i \\
(8) & \ell = L - p_j
\end{array}
$$

$\ell = L - 1$ を測れる条件の考察

$\ell = L - 1$ を測る方法は (1) か (2) のみである．

1. $L = 10p_m + 1$ **で** L **は奇数**
2. $L = p_n + 1$ **で** L **は偶数 (仮定** $L \geq 215$ **より)**

P'-モノサシについて (3)

$\ell = 215$ を測れる条件の考察

(1)	$215 = 10p_i$	偶奇性より矛盾する
(2)	$215 = p_j$	215 は素数でない
(3)	$215 = L$	L は奇数で $L = 10p_m + 1$ だが 214 は素数の 10 倍でない
(4)	$215 = 10p_i - 10p_{i'}$	偶奇性より矛盾する
(5)	$215 = p_j - p_{j'}$	$p_{j'} = 2$ だが 217 は素数でない
(6)	$215 = \lvert 10p_i - p_j \rvert$	法 5 で考えて $p_j = 5$ だが $(215 + 5)/10 = 22$ は素数でない
(7)	$215 = L - 10p_i$	L は奇数で $L = 10p_m + 1$ だが法 10 で考えて矛盾する
(8)	$215 = L - p_j$	この方法のみ可能性がある

$\ell = 75$ を測れる条件の考察

$\ell = 215$ と同様に考えると，(8) の方法のみ可能性がある．

P′-モノサシについて (4)

- ここまでで，以下が導かれた．

$$215 = L - p_j \quad (\text{ある } p_j \in \mathbf{P})$$
$$75 = L - p_k \quad (\text{ある } p_k \in \mathbf{P})$$

- この時 L は偶数で $L = p_n + 1$ である．
  - なぜなら L を奇数とすると $p_j = p_k = 2$ となり矛盾する．
- したがって，以下が成り立つ．

$$p_n = p_j + 214 = p_k + 74 \quad (\text{ある } p_j, p_k \in \mathbf{P})$$

- 以下では，上記を満たす素数 p_j, p_k が存在しないことを示す．

P′-モノサシについて (5)

命題

以下を満たす素数 p_n, p_j, p_k は存在しない．

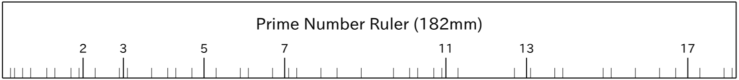
$$p_n = p_j + 214 = p_k + 74$$

証明

1. p_n, p_j, p_k は 5 以上の奇素数
   - なぜなら $p_j \neq 3$ かつ $p_k \neq 3$
2. したがって 6 を法として $p_j \equiv \pm 1$, $p_k \equiv \pm 1$
3. よって $p_n \equiv \pm 1 + 214 \equiv \pm 1 + 4$, $p_n \equiv \pm 1 + 74 \equiv \pm 1 + 2$
4. 双方を満たすのは $p_n \equiv 3$ の時だが，そのような素数 p_n は存在しない

P′-モノサシについて (6)

- **以上で** $L-1, 215, 75$ **を測れる** $L \geq 215$ **の P′-モノサシが存在しないことが示された．**
- **実際には** $L = 182$ **が最長の完備 P′-モノサシである．**



- 35, 55, 75, 85, 95, 115, 145, 155, 169, 172, 173, 175, 178, 180, 181, 182 **は** 1 **通りしか測る方法がない．**