素数ものさしの考察

屯遁 (2015 年 2 月 4 日)

現代数学 2015 年 2 月号 35 ページのクスコ氏『数学漫談』で話題として取り上げられていた「素数ものさし」[1] について考察してみた．

ここでは，cm および mm の値が素数になっているすべての位置に目盛りがあり，それ以外の位置に目盛りがないモノサシを **素数モノサシ** と呼ぶことにする (「ものさし」が読みにくいのでカタカナを使う)．また，1 mm から全長 L mm までのすべての長さを測れる時，そのモノサシは **完備** (complete) であるという．京都大学の「素数ものさし」は $L = 180$ だが，クスコ氏が指摘されているように完備でない．cm と mm の目盛り全部を使っても 55, 75, 85, 115, 145 を測れない (この文以降，単位の mm を省略する)．

完備素数モノサシは存在するのだろうか? 計算機プログラム等を使って調べればわかるが $L = 182$ はその一例である (図 1)．では，いくつ存在するのだろうか? 本稿では，ある一定の長さ以上の完備素数モノサシが存在しないことを証明し，また 23 通りが全てであることを示す．

まず p_i により i 番目の素数を表す ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$)．素数モノサシの全長を L とし，$10p < L$ を満たす最大の素数 p を p_m ，$p < L$ を満たす最大の素数 p を p_n とする．この時，目盛りの位置は $10p_i$ $(i = 1 \ldots m)$ および p_j $(j = 1 \ldots n)$ で表され，長さ ℓ の測り方は以下の 8 通りに分類できる (1) $\ell = 10p_i$, (2) $\ell = p_j$, (3) $\ell = L$, (4) $\ell = 10p_i - 10p_{i'}$, (5) $\ell = p_j - p_{j'}$, (6) $\ell = |10p_i - p_j|$, (7) $\ell = L - 10p_i$, (8) $\ell = L - p_j$ ．

ここで全長 $L \geq 215$ の完備素数モノサシの存在を仮定する．特に (天下り的ではあるが‥) $L-1$, 215, 75 を測れると仮定し，矛盾を導く．

まず，長さ $L - 1$ を測れることから $L - 1$ の位置に目盛りが必要なことがわかる (1 の位置に目盛りがないため)．すなわち $L = 10p_m + 1$ あるいは $L = p_n + 1$ である．また $L \geq 215$ より，前者の場合 L は奇数，後者の場合 L は偶数になることに注意する．

次に，長さ $\ell = 215$ は上記 (1)–(7) のどの方法でも測れないことを示す．(1) 偶奇性より当てはまらない．(2) 215 は素数でない．(3) L は奇数で $L = 10p_m + 1$ だが，214 は素数の 10 倍でない．(4) 偶奇性より当てはまらない．(5) 偶奇性より $p_{j'} = 2$ だが $217 = 7 \times 31$ は素数でない．(6) 法 5 で考えると $p_j \equiv 0$ すなわち $p_j = 5$ である．しかし $(215 + 5)/10 = 22$ は素数でない．(7) L は奇数で $215 = (10p_m + 1) - 10p_i$ だが，法 10 で考えると成り立たない．

したがって，長さ 215 を測る方法としては (8) だけが残る．すなわち，ある素数 p_j について $L - p_j = 215$ である．この時 L は偶数になる．なぜなら L を奇数とすると $p_j = 2$, $L = 217$ だが，これは $L = 10p_m + 1$ を満たさない．よって L は偶数で $L = p_n + 1$ を満たす．ここに $L - p_j = 215$ を用い $p_n = p_j + 214$ が得られる．

同様に $\ell = 75$ の場合も (1)–(7) の方法では測れない．そこから，ある素数 p_k $(k < n)$ について $p_n = p_k + 74$ となることが示せる．

整理すると，仮定している素数モノサシは，長さ 215 を測れることから (a)「ある素数 p_j について $p_n = p_j + 214$ 」，75 を測れることから (b)「ある素数 p_k について $p_n = p_k + 74$ 」を満たす．ここで $3 + 214 = 7 \times 31$, $3 + 74 = 7 \times 11$ より，p_j, p_k は 5 以上の素数である．したがって 6 を法として $p_j \equiv \pm 1$, $p_k \equiv \pm 1$ が成り立ち，(a) と (b) から $p_n \equiv \pm 1 + 4$, $p_n \equiv \pm 1 + 2$ となるが，双方を満たすのは $p_n \equiv 3$ の場合だけだ．一方 $L \geq 215$ より $p_n \geq 211$ だが (p_n は L 未満の最大の素数)，その時 $p_n \equiv 3 \pmod 6$ 満たす素数 p_n は存在しない．これは矛盾である．したがって全長 $L \geq 215$ の完備素数モノサシは存在しない．

[1] 京都大学サマーデザインスクール 2012 と不便益システム研究所の共同企画

計算機プログラムで確かめた所 $1 \leq L < 215$ の範囲で，$L = 1, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 21, 24, 30, 31, 32, 38, 44, 51, 54, 60, 62, 68, 72, 182$ の 23 通りが完備素数モノサシの全てだった．よって $L = 182$ が最大長である．

なお，素数モノサシで cm 単位の目盛りを除いた場合 $L = 62$ が完備なものの最大長になる (参考: On-Line Encyclopedia of Integer Sequences の数列 A227956)．目盛りの位置を任意とし，完備な範囲内でできるだけ目盛りの個数を減らしたモノサシも面白い．このようなモノサシは，間引き定規 (sparse ruler) と呼ばれている．マーチン・ガードナー氏の著書や藤村幸三郎氏・田村三郎氏の著書，また現代数学 2014 年 9 月号 34 ページの斉藤浩氏『数学パズルにトドメをさす?! / バラバラな数を作れ！ (その 2)』で取り上げられているので，読者諸子には一読をお勧めする．

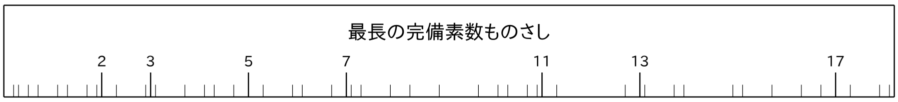

図 1: 最長の完備素数モノサシ (182mm)